AVRIL 2018

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

L'épreuve comporte deux exercices et un problème (en trois parties) indépendants, à traiter dans un ordre quelconque.

Exercice 1

Déterminer au moins un entier naturel x strictement supérieur à 1, tel que le nombre entier $n = x^2 + x - 2$ soit divisible par 3.
Même question, pour que n soit divisible par 7.

Divisibilité par 3 :
$x^2 + x - 2 = 3q$, q entier
$\Delta = 9 + 12q$
$x = [(9 + 12q)^{1/2} - 1]/2$
9 + 12q doit être un carré parfait et x un nombre entier.
Pour q = 1 à 5, échec
q = 6 donne $\Delta = 81 = 9^2$ et x = 4

Divisibilité par 7 :
$x^2 + x - 2 = 7q$, q entier
$\Delta = 9 + 28q$
$x = [(9 + 28q)^{1/2} - 1]/2$
9 + 28q doit être un carré parfait et x un nombre entier.
Pour q = 1 à 3, échec
q = 4 donne $\Delta = 121 = 11^2$ et x = 5

Exercice 2

Déterminer le polynôme P de degré 2, à coefficients entiers naturels, tel que pour tout $x \in \mathbb{N}$, on a l'égalité :

$$x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1 = [P(x)]^2$$

On pose $P(x) = ax^2 + bx + c$
On peut remarquer que $P(0)=1=c$
En développant les deux termes, on trouve :
$a^2 = 1$
$2ab = 6$ ie $ab = 3$
$b^2 + 2ac = 11$
$2bc = 6$ ie $bc = 3$
$c^2 = 1$

On en déduit :
Pour $a = 1, b = 3, c = 1$
Et pour $a = -1, b = -3, c = -1$

$P(x) = x^2 + 3x + 1$ ou $P(x) = -x^2 - 3x - 1$
La deuxième solution n'est pas admissible puisque P doit être car à coefficients entiers naturels).
Donc $P(x) = x^2 + 3x + 1$

Problème

Ln désigne le symbole des logarithmes népériens ; le symbole | | désigne la valeur absolue.
On donne e = 2,718 et 1/e = 0,368.

Partie A

Soit g l'application de $]0, +\infty[$ dans R définie par : $x \to g(x) = x \,\text{Ln}x$.
A1) Etudier précisément les variations de g.

Lim $g(x) = 0$ qd $x \to 0$
Lim $g(x) = +\infty$ qd x tend vers $+\infty$
Branche parabolique

Pente en 0 : $(g(x) - 0)/(x - 0) = \text{Ln}x \to -\infty$ qd $x \to 0$
$g'(x) = 1 + \text{Ln}x$
S'annule en $x = 1/e$; $g(1/e) = -1/e$
Pente en 1/e : 0
$g''(x) = 1/x > 0$ et g est convexe
On remarque que $g(1) = 0$ et $g(e) = e$ (intersection avec la bissectrice).

x	0		$1/e$		1		$+\infty$
f'		$-$	0		$+$		
f	0	$\searrow$	$-0{,}368$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

A2) Donner une primitive G de g.

$G(x) = (x^2 \mathrm{Ln}x)/2 - x^2/4 + \text{constante} = x^2(2\mathrm{Ln}x - 1)/4 + C$

Partie B

Soit f l'application de $R^{+*} =]0, +\infty[$ dans R^+ définie par : $x \to f(x) = |x \mathrm{Ln}x| = |g(x)|$.

B1) Calculer la limite de f quand x tend vers 0_+. On prolongera f sur R^+ par la valeur ainsi trouvée.

$\mathrm{Lim}\ f(x) = 0$ qd $x \to 0$

On peut donc prolonger f en 0 par $f(0) = 0$ et $f(x) = |x \mathrm{Ln}x|$ pour x strictement positif.

B2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f ; on étudiera particulièrement les points $x = 0_+$ et $x = 1$.

Continuité :

Les fonctions $g(x) = x\mathrm{Ln}x$ est continue, ainsi que la fonction « valeur absolue ».

Donc f est continue en tout point $x > 0$.

Par la prolongation de la question 1, f est continue sur R^+.

Dérivabilité :

En tout point différent de 1, pas de problème. Etude en 1.

$x < 1$ $f(x) = -x\mathrm{Ln}x$

$x \geq 1$ $f(x) = x\mathrm{Ln}x$

$(f(x) - 0)/(x-1) = -x\mathrm{Ln}x/(x-1) \to -1$ qd $x \to 1_-$

$(f(x) - 0)/(x-1) = x\mathrm{Ln}x/(x-1) \to 1$ qd $x \to 1_+$

Le point $x = 1$ et $y = 0$ est donc un point de rebroussement ; f n'est pas dérivable en 1.

Puisqu'on a prolongé f en 0 par $f(0) = 0$, la pente en 0 est $f(x)/x = -\mathrm{Ln}x$ donc la tangente en $x = 0$ est verticale.

B3) Etudier très précisément les variations de f et tracer son tableau de variations.

De façon évidente on a :

$x < 1$ $f(x) = - xLnx$, $f'(x) = - 1 - Lnx$

$x \geq 1$ $f(x) = xLnx$, $f'(x) = 1 + Lnx$

$f''(x) = -1/x$ ou $1/x$ selon la position par rapport à 1, donc pas de point d'inflexion.

x	0		1/e		1		e		$+\infty$
f'		+	0	-	-1 | +1		+		
f	0	↗	1/e	↘	0	↗	e	↗	$+\infty$

On peut remarquer que f(x)=Sup(g(x), -g(x))

B4) Montrer qu'existent deux points a et b appartenant à l'intervalle]1, e[vérifiant :
f(a) = 1/e et f(b) = 1.
Donner les valeurs approchées de a et b à 0,01 près.

f est strictement croissante et continue de]1, e[dans]0, e[(bijection). Donc pour tout y dans]0, e[il existe un et un seul x de]1, e[vérifiant y = f(x).

Or $0 < 1/e < e \Rightarrow \exists$ a tel que f(a) = 1/e

De même, $0 < 1 < e \Rightarrow \exists$ b tel que f(b) = 1

1/e = 0,368

f(1,32) = 0,366 et f(1,33) = 0,379 $\Rightarrow$ 1,32 < a < 1,33

f(1,76) = 0,995 et f(1,77) = 1,011 $\Rightarrow$ 0,99 < b < 1,01

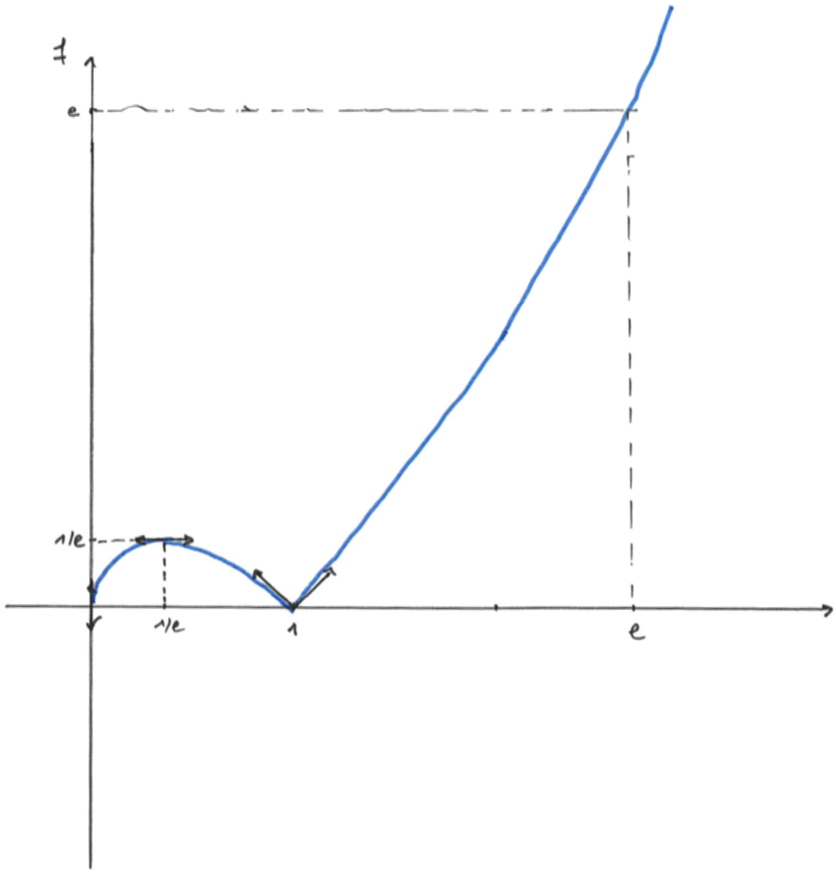
B5) Etudier le signe de v(x) = f(x) – x.

v(x) = - x(Lnx + 1) si x < 1 et x(Lnx – 1) si $x \geq 1$

v(x) = 0 en x = 0, x = 1/e et x = e

x	0		1/e		1		e		$+\infty$
v		+	0	-	|	-	0	+	

B6) Tracer le plus précisément possible la courbe C représentant f dans un repère orthonormé.



Partie C

$u(0)$ étant un réel positif ou nul, on considère la suite à termes positifs ou nuls $\{u(n)\}$, $n \geq 0$, définie par $u(0)$ et $u(n+1) = f(u(n))$.

C1) Déterminer les valeurs de $u(0)$ pour lesquelles la suite $u(n)$ est constante.
Ce sont les points fixes de f, à savoir : 0, e et 1/e
Supposons $u(n)$ constante.
Alors $u(1) = u(0)$, ie $f(u(0)) = u(0)$
D'après la question B5, $u(0) = 0$ ou $1/e$ ou e.
Inversement, si $u(0) = 0$ ou $1/e$ ou e, $f(u(0)) = u(1) = 0$ et donc $f(u(n)) = 0 \ \forall n$

C2) Dans cette question, on considère que $0 < u(0) < 1/e$.

2a – Montrer que $0 < u(n) < 1/e$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D'après la question B3 et l'étude des variations de f, on établit que $\forall x \in (0, 1/e)$, $f(x)$ est aussi dans $(0, 1/e)$.
Par récurrence immédiate, on en déduit que $0 < u(n) < 1/e$.

2b – Montrer que la suite $u(n)$ est croissante.

D'après B5, sur $(0, 1/e)$, $v(x) > 0 \Rightarrow f(u(n)) - u(n) > 0 \Rightarrow u(n+1) > u(n)$.

2c – La suite $u(n)$ est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

La suite $u(n)$ est donc croissante et majorée par $1/e$, donc est convergente vers une limite L, telle que $L = f(L) \Rightarrow L = 1/e$.

C3) Dans cette question, on considère que $1/e < u(0) < 1$.

3a – Montrer que $0 < u(1) < 1/e$.

D'après B3, f décroit de $1/e$ à 0, et d'après B5 $v(x) < 0$.
Donc $0 < u(1) < 1/e$.
Et donc pour tout $n \geq 1$, $u(n)$ est entre 0 et $1/e$.

3b – La suite $u(n)$ est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

D'après la question C2, à partir de $n = 1$, $u(N)$ est croissante, convergente de limite $1/e$.

C4) Dans cette question, on considère que $u(0) > e$.

4a – Montrer que la suite $u(n)$ est croissante.

$u(0) > e \Rightarrow u(1) > e$ et donc $u(n) > e$
$v(x) > 0 \Rightarrow u(n)$ croissante
Nous allons montrer par deux approches différentes que la suite $\{u(n)\}$ est divergente.

4b – Première approche : en raisonnant par l'absurde, montrer que $\lim_{n \to +\infty} u(n) = +\infty$.

Supposons que u(n) converge vers une limite notée L.
On a (puisque u(n) est croissante) : $L \geq u(0)$
Or f est continue en L, donc L = f(L) c'est-à-dire que L = 0 ou 1/e ou e (B5).
Comme $L \geq u(0) > e$, c'est impossible.
$\Rightarrow$ u(n) diverge

4c – Deuxième approche :

- Montrer que, pour tout $x \geq e$, on a $f'(x) \geq 2$.

$f'(x) = \text{Ln}x + 1$; pour $x \geq e$, $\text{Ln}x \geq 1$ et donc $f'(x) \geq 2$.

- En déduire que pour tout $n \in N^*$, on a : $u(n+1) - u(n) \geq 2(u(n) - u(n-1))$

$u(n+1) - u(n) = f(u(n)) - f(u(n-1))$
f étant continue et dérivable sur l'intervalle proposé dans cette question, d'après les accroissements finis, il existe un point c (le point c dépend de n, donc c'est un c(n)) tel que $f(u(n)) - f(u(n-1)) = (u(n) - u(n-1))f'(c)$
ie $f(u(n)) - f(u(n-1)) = u(n+1) - u(n) \geq 2(u(n) - u(n-1))$

- En déduire que $u(n+1) \geq u(0) + (u(1) - u(0))(2^{n+1} - 1)$

On a de façon évidente : $u(n+1) - u(n) \geq 2^n(u(1) - u(0))$
ou $u(n+1) \geq u(n) + 2^n(u(1) - u(0))$ $\forall$ n
En écrivant cette inégalité jusqu'à n = 0, ie $u(1) \geq u(0) + (u(1) - u(0))$, et en sommant, on obtient :
$u(n+1) \geq u(0) + (2^{n+1} - 1)(u(1) - u(0))$

- Retrouver le résultat de la question 4b.

Et donc lim u(n+1) = + ∞ quand $n \to +\infty$

C5) Dans cette question, on considère que $1 < u(0) < e$.

5a – Supposons qu'il existe un entier n* tel que u(n*) = b défini à la Partie B, question 4.
Quelle est alors la nature de la suite {u(n)} ?

Sur (1, e), f croît de 0 à e, et v < 0.
Soit n* tel que u(n*) = b, f(b) = 1.
u(n*+1) = f(u(n*)) = f(b) = 1
Et donc pour tout n > n*+1 ($n \geq n^*+2$) f(u(n)) = 0.
La suite est donc constante ou stationnaire à partir du rang n*+1, de limite 0.

5b – On suppose maintenant que $u(n) \neq b$ pour tout entier $n \in N$.
Montrer qu'il existe un entier n° tel que u(n°) < b (on pourra raisonner par l'absurde).
Etudier alors la convergence de la suite u(n).

Supposons, par exemple, que u(n) > b pour tout entier $n \in N$
Alors pour tout $x \in]b, e[$, $f(x) \in]1, e[$
$\Rightarrow \forall$ n, u(n) < e et donc b < u(n) < e

$u(n+1) - u(n) = f(u(n)) - u(n) < 0$ (car $v < 0$), donc $u(n)$ décroît ; comme elle minorée par b, la suite est convergente.
Sa limite L est telle que $1/e < b \leq L \leq u(0) < e$
Or $L = 0$ ou $1/e$ ou e, $\Rightarrow$ impossibilité.
Donc l'hypothèse $\forall n\ u(n) > b$ est fausse.
Il existe donc au moins un entier n° tel que $u(n) < b$.
$\forall\ x < b,\ f(x) \leq 1$.

On distingue alors 3 cas :

a) Soit $0 < u(n°+1) < 1/e$: alors $u(n)$ tend vers $1/e$ (C2)
b) Soit $u(n°+1) = 1/e$: la suite est stationnaire de limite $1/e$
c) Soit $1/e < u(n°+1) < 1$: cas C3 ; $u(n)$ converge vers $1/e$

Donc dans tous les cas, la suite converge vers $L = 1/e$

AVRIL 2018

<u>CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES</u>

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 2$^{\text{ème}}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1

Soit la fonction f de R dans R définie par f(x) = $\frac{3e^x-1}{e^x+1}$.

Calculer l'intégrale I = $\int_0^1 f(x)dx$

f(x) = $(4e^x - e^x - 1)/(e^x + 1) = (4e^x/(e^x + 1)) - 1$

On pose u = $e^x + 1$; x = 0 $\Rightarrow$ u = 2 et x = 1 $\Rightarrow$ u = 1 + e

I = 4(Ln(1+e) – Ln2) – 1

I = 4 Ln[(1+e)/2] – 1 ~ 0,077

Exercice 2

On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Calculer la matrice C = $A^3 - A$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

C = $A^3 - A = 4I$, où I est la matrice identité de dimension 3.

2) Montrer que la matrice A est inversible et déterminer son inverse A^{-1}.

$A^3 - A = 4I = A(A^2 - I) = 4I$

$A(A^2 - I)/4 = I$

D'où : $A^{-1} = (A^2 - I)/4 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/4 & -1/2 & -1/4 \\ 1/4 & 1/2 & -1/4 \end{pmatrix}$

Exercice 3

Pour tout n entier naturel strictement positif, on définit la somme S(n) par :

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n-1} \sin(\frac{k\pi}{n})$$

1) z désigne le nombre complexe $z = \cos(\pi/n) + i.\sin(\pi/n)$.
On considère la somme $Z(n) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k$
Ecrire Z(n) en fonction de z et n sous forme de fraction rationnelle.

$z = e^{i\pi/n}$
$Z(n) = (1 - z^n)/(1 - z)$

2) En déduire l'expression de S(n) en fonction de $\tan(\pi/2n)$.
S(n) est la partie imaginaire de Z(n).
$Z(n) = (1 - e^{i\pi})/(1 - e^{i\pi/n}) = 2/(1 - e^{i\pi/n}) = 2/ e^{i\pi/2n} (e^{-i\pi/2n} - e^{i\pi/2n}) = 1 + i /\tan(\pi/2n)$
$\Rightarrow S(n) = 1/ \tan(\pi/2n)$

3) Déterminer la limite de S(n)/n quand $n \to + \infty$.
$S(n)/n = 1/ n.\tan(\pi/2n) \sim 2/\pi$

Exercice 4

On considère la fonction $f : R \to R^+$, définie par $f(x) = 0$ pour $x < 0$ et $f(x) = ke^{-ax}$, pour $x \geq 0$, où a est un paramètre réel strictement positif et k une constante à déterminer.
1) Trouver la valeur de k pour que f soit une densité de probabilité sur R^+.
En écrivant que l'intégrale de f sur R vaut 1, on trouve k = a
$f(x) = ae^{-ax}$ pour $x > 0$
2) Soit X une variable aléatoire réelle dont la loi de probabilité admet pour densité la fonction déterminée à la question 1.
Donner la fonction de répartition F de X.
$F(x) = P(X < x) = 0$ pour $x < 0$
$F(x) = 1 - e^{-ax}$ pour $x \geq 0$

3) Calculer l'espérance E(X) et la variance V(X) de X.
Calcul : On rappelle que $E(X) = \int_0^{\circ\infty} xf(x)dx$ et que $V(X) = \int_0^{\circ\infty} (x - E(X))^2 f(x)dx$

$E(X) = 1/a$ et $V(X) = 1/a^2$.

4) Soient deux réels positifs u et v tels que $v > u$.
Calculer la probabilité conditionnelle $P(X > v / X > u)$.
$P(X > v / X > u) = P(X > v)/P(X > u) = e^{-av}/e^{-au} = e^{-a(v-u)}$

Exercice 5

On considère la suite $\{u(n)\}$, $n \in N$, définie par :
$u(0) = 0$, $u(1) = 1$ et $u(n+1) = 7u(n) + 8u(n-1)$

1) Pout tout $n \in N$, on définit la suite $s(n) = u(n) + u(n+1)$.
Déterminer la nature de la suite $\{s(n)\}$.
Donner l'expression générale de $s(n)$ en fonction de n.
Que vaut la limite de $s(n)$ quand $n \to +\infty$?
$u(n) + u(n+1) = 8u(n) + 8u(n-1) \Rightarrow s(n) = 8s(n-1)$
$s(0) = 1 \Rightarrow s(n) = 8^n s(0) = 8^n$
$s(n) \to +\infty$ quand $n \to +\infty$

2) On pose $v(n) = (-1)^n u(n)$, et on définit la suite $\{t(n)\}$, $n \in N$, par :
$t(n) = v(n+1) - v(n)$
Exprimer $t(n)$ en fonction de $s(n)$.
$t(n) = (-1)^{n+1} s(n)$.

3) Donner les expressions de $v(n)$ et $u(n)$ en fonction de n.
On a :
$t(n-1) = v(n) - v(n-1)$
....
$t(0) = v(1) - v(0)$
En sommant : $t(0) + t(1) + \ldots + t(n-1) = v(n) - v(0) = v(n)$ (car $v(0) = 0$)
$v(n)$ somme d'une suite géométrique de 1er terme 1 et de raison (-8) :
$v(n) = [1 + (-1)^{n+1} 8^n]/9$
$u(n) = (-1)^n v(n) = [(-1)^n - 8^n]/9$

4) Que vaut la limite de $u(n)/s(n)$ quand $n \to +\infty$?
$u(n)/s(n) = u(n)/8^n = [(-1)^n - 8^n]/9.8^n \to -1/9$ quand $n \to +\infty$

Exercice 6

Pour tout entier naturel n, on note par F(n) l'ensemble des fonctions réelles de la variable réelle, infiniment dérivables, vérifiant la relation suivante pour tout x réel :

$$4xf''(x) - 8nf'(x) - xf(x) = 0$$

1) Montrer que, $\forall n \in N$, F(n) n'est pas vide.
La fonction nulle appartient à F(n), quel que soit n.

2) Soit la fonction $f_0(x) = e^{x/2}$
Montrer que $f_0 \in F(0)$.
$f'_0(x) = e^{x/2}/2$
$f_0(x) = e^{x/2}/4$

Puisque n = 0, $4xf''(x) - xf(x) = 4x(e^{x/2}/4) - x.e^{x/2} = 0$, d'où le résultat

3) Soit une fonction f_n appartenant à F(n).
On définit la fonction f_{n+1} par : $f_{n+1}(x) = 2[(2n + 1)f_n(x) - xf_n'(x)]$
3a – Etablir la relation :
$f_{n+1}'(x) = - x f_n(x)/2$
$f_{n+1}(x) = 2[(2n + 1)f_n(x) - xf'(x)] \Rightarrow f'_{n+1}(x) = 2[(2n + 1)f'_n(x) - f'_n(x) - xf_n''(x)]$
$\Rightarrow f'_{n+1}(x) = 4nf'_n(x) - 2xf_n''(x)$
Or $f_n \in F(n) \Rightarrow 4xf_n''(x) - 8nf_n'(x) = xf_n(x)$
$2xf_n''(x) = 4nf_n'(x) + xf_n(x)/2$
En reportant dans l'expression de $f'_{n+1}(x)$: $f'_{n+1}(x) = 4nf'_n(x) - [4nf_n'(x) + xf_n(x)/2]$
D'où $f_{n+1}'(x) = - x f_n(x)/2$

3b – Montrer que $f_{n+1} \in F(n+1)$.
En dérivant le résultat de (3a), on a : $f_{n+1}''(x) = - f_n(x)/2 - x f_n'(x)/2$
$4xf_{n+1}''(x) - 8(n+1)f_{n+1}'(x) - xf_{n+1}(x)$
$= 4x[- f_n(x)/2 - x f_n'(x)/2] - 8(n+1) (- x f_n(x)/2) - 2x[(2n + 1)f_n(x) - xf_n'(x)]$
= 0 en développant
D'où le résultat

Exercice 7 *(deux questions indépendantes)*
1) On rappelle que le polynôme réel B divise le polynôme A s'il existe un polynôme Q tel que A = BQ.
Soit le polynôme A défini sur R, à coefficients réels, par : $A(x) = x^4 + ax^2 + bx + c$
A quelles conditions sur les paramètres a, b et c le polynôme A est-il divisible par le polynôme B défini par $B(x) = x^2 + x + 1$?
$x^4 + ax^2 + bx + c = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + a) + (b - a +1)x + (c - a)$
A divisible par B si $b - a + 1 = 0$ et $c - a = 0$

2) Déterminer la valeur du réel v telle que le polynôme $P(x) = (x + 1)^7 - x^7 - v$ admet une racine réelle multiple.
x est racine multiple de P si $P(x) = 0$ et $P'(x) = 0$
Soit :
$(x + 1)^7 - x^7 - v = 0$ et $7(x + 1)^6 - 7x^6 = 0$ $((x + 1)^6 - x^6 = 0)$
Ou :
$(x + 1)x^6 - x^7 - v = 0$ et $(x + 1)^6 = x^6$
Ou :
$x^6 - v = 0$ et $(x + 1)^6 = x^6$
Or $(x + 1)^6 = x^6 \Leftrightarrow (x + 1) = +/- x$
$\Rightarrow x = - ½$
Et donc v = 1/64