ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE ENSEA - ABIDJAN	ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE ENSAE-DAKAR	INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE ISSEA - YAOUNDÉ

AVRIL 2020

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG / ANALYSTES STATISTICIENS

ISE cycle long / AS

CORRIGÉ DE LA PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Attention !

L'exercice 1 de la présente épreuve est obligatoire et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice 1 étant notée sur 1 point).

Toutefois cet exercice n'entre que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Dans tous les exercices, $\mathbf{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels, $\mathbf{C}$ l'ensemble des nombres complexes, tan la fonction tangente et ln le logarithme népérien. On rappelle que $0,69 < \ln 2 < 0,7$.

Exercice 1

1. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \tan x(1+\tan^2 x)dx$.

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/3} \tan x(1+\tan^2 x)dx &= \frac{1}{2}[\tan^2 x]_0^{\pi/3} \\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

2. Donner la limite en $+\infty$ de la fonction $f(x) = \dfrac{e^{2x}-10}{1-e^x}$.

$$f(x) = -e^x\left(\frac{1-10e^{-2x}}{1-e^{-x}}\right)$$

d'où $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

3. Donner le comportement au voisignage de $x = 0$ de la fonction de la question précédente.

   Quand x tend vers 0, le numérateur de $f(x)$ tend vers -9, et son dénominateur vers 0 par valeurs négatives si $x > 0$, par valeurs positives si $x < 0$. On en déduit que $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

4. Ecrire le nombre complexe $z = -1 + \sqrt{3}i$ sous forme trigonométrique.

$$z = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

5. Donner le domaine de définition de la fonction

$$f(x) = \ln\left(\frac{1 + x^2}{1 - x^2}\right).$$

   Pour que $f(x)$ soit bien défini, il faut que la fraction à l'intérieur du logarithme soit elle-même bien définie et positive. C'est le cas si et seulement si $1 - x^2 > 0$, autrement dit quand $x \in]-1, 1[$.

6. Calculer la dérivée de la fonction définie à la question précédente. Par exemple, on peut écrire

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\ln\left(1 + x^2\right) - \ln\left(1 - x^2\right)\right)' \\ &= \frac{2x}{1 + x^2} - \frac{-2x}{1 - x^2} \\ &= \frac{2x(1 - x^2) + 2x(1 + x^2)}{1 - x^4} \\ &= \frac{4x}{1 - x^4} \end{aligned}$$

7. On considère un dé truqué où l'apparition d'une face est proportionnelle au numéro de cette face. Donner la probabilité d'obtenir un 6 quand on lance ce dé.

   Soit X la variable aléatoire égale au résultat du lancer. D'après l'énoncé, il existe $\lambda > 0$ tel que $P(X = k) = \lambda k$ pour tout entier k compris entre 1 et 6. Comme la somme de ces probabilités vaut 1, on a donc $\lambda(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 1$ d'où $\lambda = 1/21$ et $P(X = 6) = 6/21 = 2/7$.

8. On considère la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n}{4u_n+3}$. Que pouvez-vous dire de la convergence de la suite (u_n) ?

   Il est clair (faire éventuellement un raisonnement par récurrence) que $u_n > 0$ pour tout n. On a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-4u_n^2}{4u_n + 3} < 0$$

   Donc la suite est décroissante, et comme elle est minorée par 0, elle converge vers une limite positive ou nulle l qui vérifie

$$l = \frac{3l}{4l + 3},$$

   équation dont la seule racine (double) est 0, qui est donc la limite de cette suite.

9. Montrer que, pour $n \geq 1$,
$$\sum_{k=1}^{n} k!k = (n+1)! - 1.$$
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k!k &= \sum_{k=1}^{n} k!(k+1-1)\\ &= \sum_{k=1}^{n}(k+1)! - \sum_{k=1}^{n} k!\\ &= (n+1)! - 1\end{aligned}$$
par élimination des dominos.

10. Résoudre l'equation $x^4 - 6x^2 - 1 = 0$ dans $\mathbf{R}$, puis dans $\mathbf{C}$.
On pose $y = x^2$, l'équation devient donc $y^2 - 6y - 1 = 0$, dont les solutions sont $y_1 = 3 - \sqrt{10}$ et $y_2 = 3 + \sqrt{10}$.
Seule y_2 est positive et admet donc deux racines réelles, donc en revenant à x, les solutions réelles de l'équation considérée sont $\sqrt{3+\sqrt{10}}$ et $-\sqrt{3+\sqrt{10}}$.
Les solutions dans $\mathbf{C}$ sont les deux précédentes auxquelles on adjoint $i\sqrt{-3+\sqrt{10}}$ et $-i\sqrt{-3+\sqrt{10}}$.

Exercice 2

On cherche dans cet exercice à résoudre l'équation
$$x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x - 3 = 0. \tag{1}$$

1. Soit α une solution de (1) et g la fonction définie par $g(x) = x^2 + x - 1$. Donner la valeur de $(g(\alpha))^2$.
$(g(x))^2 = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 1$ donc en utilisant l'équation on trouve directement que $(g(\alpha))^2 = 4$.
2. Déduire de la question précédente les solutions de (1) dans $\mathbf{R}$, puis dans $\mathbf{C}$.
Si α est solution de (1), on déduit de la question précédente que $\alpha^2+\alpha-1 = -2$ ou $\alpha^2+\alpha-1 = 2$. La deuxième équation admet les solutions réelles $(-1+\sqrt{13})/2$ et $(-1-\sqrt{13})/2$. La première n'admet pas de solution réelle, en revanche elle admet les solutions complexes j et j^2. On vérifie sans peine que ces solutions sont bien des solutions de (1).

Exercice 3

1. On considère la fonction ϕ définie par
$$\phi(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$$
(a) Donner le domaine de définition de ϕ, et calculer les limites de ϕ aux bornes de son domaine de définition.
$\phi(x)$ est définie si et seulement si $x \neq 0$ et $1 + x > 0$. Le domaine de définition de ϕ est donc $]-1, 0[\cup]0, +\infty[$. Quand x tend vers -1 par valeurs supérieures, $\phi(x)$ tend vers

$+\infty$ car $x < 0$. En utilisant par exemple la règle de l'Hôpital, on montre que $\phi(x)$ tend vers 1 lorsque x tend vers 0 à droite ou à gauche. Par croissance comparée, $\phi(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

(b) Calculer la dérivée ϕ' de ϕ.

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} \\ &= \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}\end{aligned}$$

(c) Etudier les variations de la fonction h définie par

$$h(x) = x - (1+x)\ln(1+x)$$

et en déduire le signe de $\phi'(x)$ selon la valeur de x.

$$\begin{aligned}h'(x) &= 1 - \frac{1+x}{1+x} - \ln(1+x) \\ &= -\ln(1+x)\end{aligned}$$

qui est positive si $-1 < x < 0$ et négative dès que $x > 0$: h est croissante, puis décroissante sur ces intervalles, sa limite en 0 étant nulle. On en déduit que $h(x) \leq 0$ pour tout x de son domaine de définition, et donc qu'il en est de même de $\phi'(x)$ puisque $\phi'(x)$ est du même signe que $h(x)$, son dénominateur étant positif sur l'ensemble de son domaine de définition.

(d) Dresser le tableau de variations de ϕ, et donner l'allure de sa courbe représentative (on ne cherchera pas à calculer la limite de $\phi'(x)$ en 0).
Ils se déduisent des questions précédentes.

2. On s'intéresse maintenant à la fonction f qui à $x > 1$ associe

$$f(x) = \int_1^x \phi(t)dt.$$

(a) Montrer que f est strictement croissante sur $]1, +\infty[$.
$f'(x) = \phi(x) > 0$ d'après les questions précédentes, donc f est strictement croissante sur $]1, +\infty[$.

(b) Montrer que

$$\int_1^x \frac{\ln t}{t} dt \leq f(x) \leq \int_1^x \frac{ln(2t)}{t} dt.$$

En déduire que

$$\frac{\ln^2 x}{2} \leq f(x) \leq \ln 2 \ln x + \frac{\ln^2 x}{2}.$$

Pour tout $x \in]1, +\infty[$, $x \leq 1 + x \leq 2x$ donc $\frac{\ln x}{x} \leq \frac{\ln(1+x)}{x} \leq \frac{\ln 2x}{x}$ et en intégrant entre 1 et x cette double inégalité, on obtient le premier résultat. Pour obtenir le second, on remarque que $\frac{\ln t}{t}$ est de la forme $u'u$ qui s'intègre facilement, en notant en outre que le membre de droite s'écrit $\int_1^x \frac{ln(2)}{t} + \int_1^x \frac{ln(t)}{t}$.

(c) Déterminer les limites de $f(x)$ et de $f(x)/x$ quand x tend vers $+\infty$.

L'inégalité de gauche donne immédiatement $\lim_{n \to +\infty} f(x) = +\infty$, et par croissance comparée des fonctions puissances et logarithmes, l'inégalité de droite nous dit que $\lim_{n \to +\infty} f(x)/x = 0$.

(d) Dresser le tableau de variations de f et donner l'allure de sa courbe représentative.

Ils se déduisent des questions précédentes en remarquant en outre que $f(1) = 0$ et que la courbe représentative de f admet une branche parabolique parallèle à l'axe des abcisses en $+\infty$ d'après le dernier résultat obtenu.

Exercice 4

On considère la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx.$$

1. Calculer I_0 et I_1.
   $I_0 = \pi/2$; $I_1 = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 1$.
2. Trouver une relation entre I_{n+2} et I_n.
   On intègre deux fois par parties :

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= [-\sin^{n+1} x \cos x]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (n+1) \sin^n x \cos x \cos x dx \\ &= 0 + (n+1) \int_0^{\pi/2} (n+1) \sin^n x (1 - sin^2 x) dx \\ &= (n+1)(I_n - I_{n+2}) \end{aligned}$$

   d'où

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

3. Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est décroissante, et en déduire qu'elle converge.
   Pour tout $x \in]0, \pi/2]$, $0 < \sin^n x$ et $0 < \sin x \leq 1$, donc $\sin^{n+1} x \leq \sin^n x$. Par suite, $I_{n+1} \leq I_n$. Par ailleurs, $I_n \geq 0$ puisque $\sin^n x > 0$ pour tout $x \in]0, \pi/2]$. La suite est décroissante et minorée par 0, donc elle converge vers une limite positive ou nulle.
4. Montrer que, pour tout $n \geq 0$,

$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n}$$

   et en déduire que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1.$$

D'après ce qui précède,

$$\frac{n+1}{n+2} = \frac{I_{n+2}}{I_n} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n}.$$

On a donc

$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1,$$

et on conclut à l'aide du lemme des gendarmes.

5. (a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $nI_nI_{n-1} = \pi/2$.

   On fait un raisonnement par récurrence : la proposition est vraie pour $n = 1$ d'après la première question. Supposons que, pour tout $k \leq n$, $kI_kI_{k-1} = \pi/2$: alors

$$\begin{aligned}(n+1)I_{n+1}I_n &= (n+1)\frac{n}{n+1}I_{n-1}\frac{n-1}{n}I_{n-2} = \\ &= (n-1)I_{n-1}I_{n-2} \\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

   d'apèrs l'hypothèse de récurrence, ce qui conclut la démonstration.

   (b) En déduire la limite de la suite (I_n).

   On sait que I_n converge vers une limite $l \geq 0$, c'est donc le cas aussi de I_{n-1}. De la question précédente, on tire que

$$I_nI_{n-1} = \frac{\pi}{2n}$$

   d'où, en passant à la limite dans cette égalité, $l^2 = 0$ et finalement $l = 0$.

Exercice 5

Soit n un entier naturel non nul. On considère dans cet exercice la fonction définie sur $\mathbf{R}^+$ par

$$f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - 1.$$

1. Etudier les variations de la fonction f_n.

   La fonction f_n est somme d'une constante et de fonctions puissances strictement croissantes sur $\mathbf{R}^+$: elle est donc elle-même strictement croissante de -1 à sa limite en $+\infty$, qui est évidemment $+\infty$.

2. Montrer que l'équation

$$x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - 1 = 0$$

   admet une unique solution $a_n \geq 0$. Donner la valeur de a_2.

   f_n est continue, strictement croissante sur $\mathbf{R}^+$; $f_n(0) = -1$ et $f_n(2) > 1$, donc par le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbf{R}^+$.

   $f_2(x) = x^2 + x - 1$ donc a_2 est l'unique racine positive de ce trinôme, à savoir $a_2 = (-1 + \sqrt{5})/2$.

3. Montrer que $f_n(a_{n+1}) \leq 0$ et en déduire que la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est décroissante, puis qu'elle est convergente.

   On a $f_n(a_{n+1}) = a_{n+1}^n + \cdots + a_{n+1} - 1 = -a_{n+1}^{n+1} \leq 0$ puisque $a_{n+1} \geq 0$. Par suite, $f_n(a_{n+1}) \leq f_n(a_n)$ et comme f est strictement croissante, $a_{n+1} \leq a_n$. La suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est donc décroissante, et comme elle est minorée par 0, elle converge vers une limite $a \geq 0$.

4. Donner, en la justifiant, la valeur de $a_n^{n+1} + a_n^n + \cdots + a_n^3 + a_n^2 - a_n$, et en déduire que

$$a_n = \frac{1}{2} + \frac{a_n^{n+1}}{2}.$$

$a_n^{n+1} + a_n^n + \cdots + a_n^3 + a_n^2 - a_n = a_n f_n(a_n) = 0$, et comme $a_n^n + \cdots + a_n^3 + a_n^2 = 1 - a_n$, on trouve que $a_n^{n+1} + 1 - 2a_n = 0$ d'où le résultat demandé.

5. Déterminer la limite de la suite $(a_2^{n+1})_{n\geq 0}$ quand $n \to \infty$. En déduire la limite, toujours quand $n \to \infty$, de la suite $(a_n^{n+1})_{n\geq 0}$, puis celle de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$.

$a_2 = (-1+\sqrt{5})/2 \in]0,1[$ donc $\lim_{n\to\infty} a_2^{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_2^n = 0$. Comme la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est décroissante, $0 \leq a_n^{n+1} \leq a_2^{n+1}$, et par le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to\infty} a_n^{n+1} = 0$. Enfin, il découle de la question précédente que $\lim_{n\to\infty} a_n = 1/2$.

Exercice 6

1. Caractériser l'ensemble des nombres complexes z vérifiant l'équation

$$\left|\frac{z-i}{z+i}\right| = 1.$$

En posant $z = a + ib$, l'équation précédente s'écrit $|a + (b-1)i| = |a + (b+1)i|$ d'où, en élevant au carré, $a^2 + (b-1)^2 = a^2 + (b+1)^2$, d'où on tire que $b = 0$: z doit donc être un nombre réel.

2. On considère l'équation

$$\left|\frac{z-i}{z+i}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{2}$$

(a) Trouver, si elles existent, les solutions réelles et les solutions imaginaires pures de l'équation (2).

Si z est réel, $z = a \in \mathbf{R}$ et en reprenant le raisonnement ci-dessus, on arrive à $a^2 + 1 = \frac{1}{2}(a^2+1)$ d'où $a^2 = -1$, ce qui est impossible dans $\mathbf{R}$: il n'y a donc pas de solution réelle.

Si z est imaginaire pur, $z = ib$, $b \in \mathbf{R}$, et le même raisonnement donne $(b-1)^2 = \frac{1}{2}(b+1)^2$ d'où $b^2 - 6b + 1 = 0$ dont les solutions sont $b_1 = 3 + 2\sqrt{2}$ et $b_2 = 3 - 2\sqrt{2}$. Les solutions imaginaires pures de (2) sont donc ib_1 et ib_2.

Soit $z = a + ib$ une solution de (2)

(b) Montrer que

$$a^2 + (b-m)^2 = k$$

où m et k sont deux réels qu'on déterminera.

D'une manière générale, par les mêmes calculs, on trouve $a^2 + b^2 - 6b + 1 = 0$, soit $a^2 + (b-3)^2 = 8$

(c) soit $Z = z + 3i$: donner le module de Z.

Si on écrit $Z = A + iB$, $A = a$ et $B = b - 3$, donc $A^2 + B^2 = 8$ d'où $|Z| = 2\sqrt{2}$.

(d) Dans le plan complexe, où placeriez-vous les solutions de (2) ?

Z se trouve donc sur le cercle centré en 0 et de rayon $2\sqrt{2}$. Pour passer de Z à z, on fait une transition de $3i$: les solutions de (2) se trouvent donc sur le cercle centré au point d'affixe $3i$, donc sur l'axe des ordonnées, et de même rayon.

Exercice 7

Un établissement scolaire estime qu'un élève sérieux doit avoir une probabilité inférieure à 2% d'arriver en retard en cours. On considère dans cet exercice un élève sérieux, dont la probabilité d'arriver en retard est, chaque jour, de 2%. Sur un semestre scolaire de 100 jours, on note X la variable aléatoire égale au nombre de retards constatés chez cet élève.

1. Nommer la loi de la variable aléatoire X et donner son espérance ainsi que sa variance.

   Il s'agit de la loi binomiale de paramètres 100 (nombre de jours) et $0,02$ (probabilité de retard chaque jour). Son espérance est $100 \times 0,02 = 2$, et sa variance $100 \times 0,02 \times 0,98 = 1,96$.

2. Quelle est la probabilité pour que l'élève n'ait jamais été en retard sur tout le semestre ? Pour qu'il ait été en retard exactement une fois ? Pour qu'il ait été en retard tous les jours ? Que pensez-vous de ce dernier résultat ?

   La probabilité de n'avoir connu aucun retard est de $0,98^{100} = 0,13$. Celle d'avoir connu exactement un retard est de $100 \times 0,98^{99} \times 0,02 = 0,27$, et celle d'avoir été tous les jours en retard de $0,02^{100} = 1,26 \times 10^{-170}$. Cette quantité est assurément négligeable !

3. L'établissement décide d'infliger une sanction à partir du 3ème retard dans le semestre. Calculer la probabilité pour que l'élève sérieux considéré dans cet exercice soit sanctionné. Quelle aurait été cette probabilité pour un élève très sérieux ayant chaque jour une probabilité de 1% d'arriver en retard ?

   L'élève sera sanctionné s'il a au moins trois retards dans le trimestre, avec la probabilité $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) = 1 - 0,98^{100} - 100 \times 0,98^{99} \times 0,02 - 495 \times 0,98^{98} \times 0.02^2 = 0,32$. Pour un élève très sérieux, le résultat aurait été de 8%.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2020

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG / ANALYSTES STATISTICIENS

ISE cycle long / AS

CORRIGÉ de la 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Dans toute l'épreuve, *Ln* désigne le logarithme népérien, *e* le nombre de Néper, *R* l'ensemble des nombres réels et *C* l'ensemble des nombres complexes.

Exercice n° 1

Soit l'application *f* définie sur $R-\{2\}$ par : $f(x)=\dfrac{x^3-x^2}{(x-2)^2}$

1. Etudier les variations de *f* et tracer son graphe.

La fonction est définie pour *x* différent de 2. La droite *x*=2 est une asymptote verticale et la droite d'équation $y=x+3$ une asymptote oblique.

La dérivée de *f* est égale à $f'(x)=\dfrac{(3x^2-2x)(x-2)^2-(x^3-x^2)2(x-2)}{(x-2)^4}$ et après simplification $f'(x)=\dfrac{x(x^2-6x+4)}{(x-2)^3}$ qui s'annule pour $x=0; x=3\pm\sqrt{5}$.

La fonction est :

- croissante de $]-\infty,0]$ sur $]-\infty,0]$;
- décroissante sur $[0,3-\sqrt{5}]$;
- croissante sur $[3-\sqrt{5}, 2[$;
- décroissante sur $]2, 3+\sqrt{5}]$;
- croissante sur $[3+\sqrt{5}, +\infty[$.

2. Déterminer les constantes *a*, *b*, *c* et *d* telles que : $f\ (x) = ax + b + \dfrac{c}{x-2} + \dfrac{d}{(x-2)^2}$

Par identification des polynômes, on obtient : $f\ (x) = x + 3 + \dfrac{8}{x-2} + \dfrac{4}{(x-2)^2}$

3. Calculer $I = \int_0^1 f\ (x)\ dx$

$$I = \int_0^1 f\ (x)\ dx = \int_0^1 x + 3 + \frac{8}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2}\, dx = \left[\frac{x^2}{2} + 3x + 8\,Ln\,|x-2| - \frac{4}{(x-2)} \right]_0^1 = \frac{11}{2} - 8\,Ln2$$

Exercice n° 2

Pour *n* entier supérieur ou égal à 1, on définit la fonction numérique f_n par
$f_n(x) = Ln\ ((1+x^2)^n)$

1. Etudier les variations de f_n et tracer son graphe (on étudiera également la convexité de cette fonction).

La fonction est paire et sa dérivée est égale à $f_n^{'}(x) = \dfrac{2nx}{1+x^2}$, qui est strictement positive sur l'ensemble des réels positifs. Sa dérivée seconde est : $f_n^{''}(x) = \dfrac{2n(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$. La fonction est concave pour *x*>1. Elle admet une branche parabolique dans la direction horizontale.

2. Calculer $I_1 = \int_0^1 f_1(x)\, dx$. En intégrant par parties, on obtient :

$$I_1 = \left[x\,Ln(1+x^2) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2}\, dx = Ln2 - 2 + \pi/2$$

3. Calculer $I_n = \int_0^1 f_n(x)\, dx$. On a tout simplement $I_n = n I_1$

4. Etudier la suite réelle (x_n) définie par : $x_{n+1} = Ln(1+x_n^2)$ et $x_0 > 0$

Si cette suite converge vers une limite *l*, cette dernière vérifie : $l = Ln(1+l^2)$, soit *l*=0. Par ailleurs cette suite est à termes positifs et décroissante, donc elle converge vers 0.

En effet : $x_{n+1} - x_n = Ln(1+x_n^2) - x_n < 0$ (Etude brève de la fonction).

Exercice n° 3

1. Pour $z \in C$, résoudre l'équation : $|z+1| = 1$

L'équation est équivalente à $(x+1)^2 + y^2 = 1$, les solutions se trouvent donc sur le cercle de centre $\omega(-1,0)$ et de rayon 1.

2. Pour $z \in C$, résoudre l'équation : $|2z+1| = 1$

L'équation est équivalente à $(2x+1)^2 + 4y^2 = 1$, soit $(x+1/2)^2 + y^2 = 1/4$ les solutions se trouvent donc sur le cercle de centre $\omega(-1/2,0)$ et de rayon 1/2.

3. Soit $z_n \in C$, vérifiant l'équation : $|\alpha_n z_n + 1| = 1$, où (α_n) est une suite de nombres réels strictement positifs qui tend vers $+\infty$. Déterminer $\underset{n\to\infty}{Lim}\, z_n$

L'équation est équivalente à $(\alpha_n x_n + 1)^2 + \alpha_n^2 y^2 = 1$, soit $(x_n + \dfrac{1}{\alpha_n})^2 + {y_n}^2 = \dfrac{1}{\alpha_n^2}$.

Quand $n \to \infty$, $z_n \to 0$

Exercice n° 4

On dispose d'un casier carré formé de trois lignes et de trois colonnes (donc de neuf cases), comme le montre le dessin suivant :

Dans ce jeu, on dispose de trois balles qui seront lancées une par une dans le casier. On gagne si les trois balles sont alignées sur une même ligne, colonne ou diagonale.

1. Quelle est la probabilité de gagner si la première balle tombe dans la case au centre du carré ?

La deuxième balle peut tomber n'importe où. Et il reste 1 chance sur sept pour la troisième,

donc 1/7.

2. Quelle est la probabilité de gagner si la première balle tombe dans une case au coin du carré ?

On a 6 possibilités sur 8 pour la deuxième balle et une seule possibilité pour la dernière, soit 6/8*1/7=3/28

3. Quelle est la probabilité de gagner si la première balle tombe dans une case au milieu d'un côté du carré ?

Pour la deuxième balle, on a 4 possibilités sur 8, d'où pour gagner : 4/8*1/7=1/14

4. Quelle est la probabilité de gagner ?

Les trois cas envisagés précédemment constituent l'ensemble des évènements possibles.

La probabilité de gagner est donc : 1/9*1/7+4/9*3/28+4/9*1/14=2/21

Exercice n° 5

Soit la fonction *f* définie sur l'ensemble des nombres réels non nuls par : $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$

1. Démontrer que *f* n'a pas de limite quand *x* tend vers zéro.

Par exemple, on considère la suite $x_n = \frac{2}{1+2n}$ qui tend vers 0 et

$f(x_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(1+2n)\right) = (-1)^n$ qui n'admet pas de limite.

2. Soit la fonction *g* définie sur *R* par : $g(x) = \begin{cases} x\,f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Etudier la continuité et la dérivabilité de *g* sur *R*.

- Pour $x \neq 0$, la fonction *g* est le produit de fonctions continues et dérivables, donc elle est continue et dérivable.

- En 0, on a : Pour $x \neq 0$, $|g(x)| \leq |x|$ qui tend vers 0 quand *x* tend vers 0. La fonction est donc continue en 0.

- En 0, on a : Pour $x \neq 0$, $\dfrac{g(x)-g(0)}{x} = \sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$ qui n'a pas de limite (question 1) et la fonction n'est pas dérivable en 0.

3. On considère la fonction *h* définie sur *R* par : $h(x) = g(x)\sin\left(\dfrac{\pi}{f(x)}\right)$ si $x \neq 0$ et $\dfrac{1}{x} \notin Z$ et $h(x) = 0$ dans les autres cas.

Etudier la continuité de *h* sur *R*.

- Si $x \neq 0$ et $\dfrac{1}{x} \notin Z$, la fonction est bien définie et continue comme composée de fonctions continues.

- En 0, pour $x \neq 0$ et $\dfrac{1}{x} \in Z$, $h(x) = 0 \rightarrow h(0) = 0$. Pour $x \neq 0$ et $\dfrac{1}{x} \notin Z$, $|h(x)| \leq |x| \rightarrow 0$ et la fonction est continue en 0.

- Pour $x \neq 0$ et $\dfrac{1}{x} \in Z$, posons $x = \dfrac{1}{n}$. On a, pour $x \neq 0$, $|h(x)| \leq |g(x)|$ et $\underset{x \to 1/n}{Lim}\, g(x) = g(1/n) = 0$

En conclusion *h* est continue sur *R*.

4. La fonction *h* est-elle dérivable en zéro ?

Pour $x \neq 0$, $\dfrac{h(x)}{x} = \sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{\sin(\pi/x)}\right)$ si $\dfrac{1}{x} \notin Z$ et sinon $\dfrac{h(x)}{x} = 0$.

Soit la suite $x_n = \dfrac{1}{n}$ et $\dfrac{h(x_n)}{x_n} = 0$, donc si la fonction *h* est dérivable en 0, alors $\dfrac{h(x)}{x}$ a une limite nulle en 0.

Soit la suite $y_n = \dfrac{3}{1+6n}$ et $\dfrac{h(y_n)}{y_n} = \sin\left(\dfrac{\pi}{3} + 2n\pi\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{\sin(\pi/3+2n\pi)}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}\right)$ qui ne tend pas vers 0 à l'origine, donc la fonction *h* n'est pas dérivable en 0.

Exercice n° 6

Soit la fonction *f* définie sur *R* par : $f(x)=(1+x^2)\,e^{-x}$

1. On considère la suite (u_n) définie par la relation de récurrence $u_{n+1}=f(u_n)$ et $u_0=3/2$. Montrer que $1\le u_n\le 3/2$ pour tout *n*. On donne $e^{-1}\approx 0.368$ et $e^{-3/2}\approx 0.223$

Démonstration par récurrence : $u_0=3/2$ et on suppose que $1\le u_n\le 3/2$.

La dérivée de *f* est : $f'(x)=-e^{-x}\,(x-1)^2$ et cette fonction est décroissante sur $[1,3/2]$, donc $f(1)\ge f(u_n)\ge f(3/2)$ et $f(1)<3/2$; $f(3/2)>1$. Par conséquent $1\le u_{n+1}\le 3/2$.

2. Montrer que $\left|f'(x)\right|\le 1/2$ pour tout $x\in[1,3/2]$.

On a $f'(x)=-e^{-x}\,(1-x)^2$ et donc $\left|f'(x)\right|\le 1/4e\le 1/2$

3. Montrer que *f* admet un point fixe que l'on notera x_0.

Soit $y=f(x)-x$, alors $y'=f'(x)-1$ et $y''=e^{-x}(x-1)(x-3)$. A l'aide du tableau des variations *y* est strictement décroissante et continue avec $f(-1)>0$ et $f(1)<0$, il existe donc un unique $x_0\in[-1,1]$ (théorème des valeurs intermédiaires), tel que : $f(x_0)=x_0$.

4. Etudier la convergence de la suite (u_n).

Si la suite est convergente, elle converge nécessairement vers x_0. La fonction *f* étant décroissante, la suite ne sera pas monotone. Il faut donc procéder autrement.

D'après l'inégalité des accroissements finis, on a : $\left|f(u_n)-f(x_0)\right|\le\frac{1}{2}\left|u_n-x_0\right|$, soit $\left|u_{n+1}-x_0\right|\le\frac{1}{2}\left|u_n-x_0\right|$ et par conséquent $\left|u_{n+1}-x_0\right|\le\frac{1}{2^n}\left|u_0-x_0\right|\le\frac{1}{2^{n+1}}\to 0$. La suite est donc convergente vers x_0.